CONCOURS D'ENTREE 1993

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

COMMUNE AUX DEUX OPTIONS

DUREE : 1 heure.

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = 1$ et on supposera ce résultat (convergence et valeur de l'intégrale) acquis dans tout le problème.

On définit les applications Φ et Ψ sur $\mathbb{R}$, par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt,\ \Psi(x) = \int_{0}^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt.$$

1. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, préciser $\Phi(-x)$ en fonction de $\Phi(x)$.

   b. Que vaut $\Phi(0)$? Préciser aussi la limite de $\Psi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, démontrer la formule :

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{ x.e^{-\frac{x^2}{2}} + \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \right\}$$

   b. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, justifier l'existence d'un polynôme P_n, de degré 2n, pair, et d'une constante réelle C_n, tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Psi(x) = \frac{x.P_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + C_n \int_0^x t^{2.n+2} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt.$$

   On explicitera P_n et C_n.

   c. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, donner une constante réelle D_n, telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left| \Psi(x) - \frac{x.P_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right| \le D_n |x|^{2n+3}.$$

   d. En déduire une valeur N dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout x de [-2,2], on ait :

$$\left| \Psi(x) - \frac{x.P_N(x).e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right| \le 10^{-6}.$$

   e. En déduire un algorithme de calcul approché de $\Psi(x)$ pour x dans [-2,2] : on pourra présenter celui-ci en pseudo-langage, ou sous l'aspect d'une procédure (ou fonction) Turbo Pascal. On attend ici une réponse courte, non sophistiquée.

   f. Utiliser ce qui précède et une calculette, afin de donner des valeurs approchées à 10^{-6} près des nombres suivants :
   (i) $\Psi(0,5)$ (ii) $\Psi(1)$ (iii) $\Psi(1,5)$ (iv) $\Psi(2)$.
   Nota bene : On indiquera dans chacun des quatre cas la valeur de $P_N(x)$.

3. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $x>0$, démontrer la formule :

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,dt \right\}$$

   b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $x>0$, justifier l'inégalité :

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \le 1 - \Phi(x) \le \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2.\pi}}.$$

   En déduire une valeur approchée à 10^{-4} près de $\Phi(3)$.

4. Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 - \Phi(x)\right).dx$ et la calculer.

350
Génie de l'eau de Strasbourg
Maths appliquées toutes options 1/1